T O P O L O G I A
WPPT I, sem. letni
EGZAMIN PODSTAWOWY

Wrocław, 21 czerwca 2010

ZADANIA NA OCENĘ CELUJĄCĄ

ZADANIE 1. Udowodnij, że jeśli każda funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$ jest ograniczona, to X jest przestrzenią zwartą.

ROZWIĄZANIE: Załóżmy, że X nie jest zwarta. Trzeba skonstruować funkcję ciągłą i nieograniczoną. Niech (x_n) będzie ciągiem w X bez podciągu zbieżnego. W szczególności żaden z punktów x_n nie jest granicą podciągu ciągu (x_n), czyli dla każdego n istnieje kula $K(x_n, \epsilon_n)$ wolna od innych punktów tego ciągu. Teraz pokażemy, że kule $K(x_n, \frac{\epsilon_n}{2})$ są parami rozłączne: gdyby dwie takie kule (o numerach $n \neq m$) miały punkt wspólny, to z warunku trójkąta odległość x_n od x_m byłaby mniejsza od $\frac{\epsilon_n + \epsilon_m}{2}$, a to jest mniejsze od większego z promieni ϵ_n, ϵ_m i wtedy kula o większym z tych promieni zawierałaby oba punkty, a tak być nie może. Możemy teraz zmniejszyć promienie kul rozłącznych tak by tworzyły ciąg δ_n malejący do zera. W ten sposób uzyskujemy ciąg parami rozłącznych kul $K(x_n, \delta_n)$ o promeniach malejących do zera.
Dla każdego n określamy funkcję ciągłą f_n na X o własnościach: 1. $f_n(x) \in [0, 1]$, 2. $f_n(x) = 0$ dla $x \notin K(x_n, \delta_n)$ i 3. $f(x_n) = 1$ (jak to zrobić – jest opisane w rozwązaniu zadania 5). Wreszcie definiujemy $f = \sum_n nf_n$. Oczywiście f jest nieograniczona, gdyż dla każdego n, $f(x_n) = n$. Ciągłość f sprawdzimy osobno w każdym punkcie. Ustalmy $x \in X$. Najpierw pokażemy, że istnieje otoczenie U punktu x przekrawające się niepusto tylko ze skończenie wieloma kulami $K(x_n, \delta_n)$. Gdyby tak nie było, to oznaczałoby, że istnieje podciąg indeksów n_k i ciąg punktów $y_k \in K(x_{n_k}, \delta_{n_k})$ zbieżny do x. Ponieważ δ_{n_k} maleją do zera, to widać, że wówczas ciąg (x_{n_k}) też zbiega do x, a to jest sprzeczne z założeniem, że ciąg (x_n) nie ma podciągów zbieżnych. Zatem istnieje $N \in \mathbb{N}$ i otoczenie U punktu x, które przekrawa się niepusto tylko z (nie koniecznie wszystkimi) kulami o numerach $n \leq N$. Wtedy funkcja f na otoczeniu U punktu x jest tożsama ze skończoną sumą $\sum_{n=1}^{N} nf_n$, a to jest funkcja ciągła, jako skończona suma funkcji ciągłych. Zatem f jest ciągła w punkcie x.

ZADANIE 2. Udowodnij, że przestrzeń zwarta jednorodna jest albo skończona, albo nieprzeliczalna.

ROZWIĄZANIE: Załóżmy, że X jest jednorodną i zwartą przestrzenią nieskończoną i przeliczalną. Ponieważ X jest nieskończona, więc zawiera ona ciąg różnowartościowy (x_n). Ze zwartości, ciąg (x_n) ma podciąg zbieżny do jakiegoś $x \in X$. Punkt x nie jest izolowany (bo wtedy każdy ciąg zbieżny do x jest od pewnego miejsca stały, a więc nie różnowartościowy) i wtedy zbiór jednoelementowy $\{x\}$ jest nigdzie gęsty. Jednorodność oznacza, że wszystkie punkty przestrzeni mają te same własności topologiczne, zatem każdy zbiór jednoelementowy jest nigdzie gęsty. Z przeliczalności cała przestrzeń wychodzi I kategorii. Jako zwarta jest zupełna, więc mamy sprzeczność z Twierdzeniem Baire'a.

ZADANIA „ZWYKŁE”

ZADANIE 1. W przestrzeni metrycznej (X, d) dany jest dowolny zbiór F. Udowodnij, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x) = d(x, F) \quad \Big(= \inf\{d(x, y) : y \in F\} \Big)$$

jest ciągła.

ROZWIĄZANIE: Ta funkcja jest nawet Lipschitzowska ze stałą 1: Niech $d(x, y) = r$. Ustalmy dowolny $\epsilon > 0$. Niech $z \in F$ będzie taki, że $d(x, z) < d(x, F)+\epsilon$. Wtedy $d(y, F) \leq d(y, z) < d(y, x) + d(x, z) \leq r + d(x, F) + \epsilon$. Pokazaliśmy, że $f(y) < f(x) + r + \epsilon$. Ponieważ ϵ jest dowolny, dostajemy $f(y) \leq f(x) + r$. Symetrycznie pokażemy $f(x) \leq f(y) + r$ co razem daje $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$.

ZADANIE 2. Udowodnij, że jeśli $f : X \to Y$ jest jednostajnie ciągła i zbiór $A \subset X$ jest całkowicie ograniczony, to $f(A)$ też jest całkowicie ograniczony.

ROZWIĄZANIE: Ustalmy $\epsilon > 0$. Niech $\delta > 0$ będzie taka, że $d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$. Istnieje układ skończenie wiele kul o promieniu δ pokrywający A. Ich obrazy oczywiście pokrywają $f(A)$. Z doboru δ widać, że obraz kuli o promieniu δ i środku x jest zawarty w kuli o promieniu ϵ i środku $f(x)$. Zatem obrazy naszych kul są zawarte w kulach epsilonowych w Y. Kul tych jest skończenie wiele i pokrywają one $f(A)$.

ZADANIE 3. Funkcja rzeczywista $f : X \to \mathbb{R}$ określona na przestrzeni metrycznej nazywa się *lokalnie ograniczona* jeśli dla każdego punktu $x \in X$ istnieje promień r_x i stała dodatnia C_x takie, że na kuli $K(x, r_x)$ funkcja f jest ograniczona (co do modułu) przez stałą C_x. Udowodnij, że na przestrzeni zwartej każda funkcja lokalnie ograniczona jest ograniczona.

ROZWIĄZANIE: Kule $K(x, r_x)$ pokrywają przestrzeń X. Ze zwartości wynika, że wystarczy skończenie wiele kul, powiedzmy $K(x_1, r_{x_1}), \dots, K(x_n, r_{x_n})$. W każdej z nich funkcja jest ograniczona ze stałą dodatnią C_{x_i}. Niech $C = \max\{C_{x_1}, \dots, C_{x_n}\}$. Sprawdzimy, że funkcja jest ograniczona ze stałą C. Weźmy dowolny punkt $x \in X$. Istnieje numer $i \in \{1, \dots, n\}$ taki, że $x \in K(x_i, r_{x_i})$ i wtedy $|f(x)| \leq C_{x_i} \leq C$.

ZADANIE 4. Udowodnij, że jeśli podzbiór przestrzeni zupełnej jest jednocześnie rezydualny i typu F_σ, to zawiera on zbiór otwarty.

ROZWIĄZANIE: Nasz zbiór rezudualny oznaczmy przez A. Wiemy, że $A = \bigcup F_n$, gdzie F_n są domknięte. Gdyby A nie zawierał żadnego zbioru otwartego, czyli byłby brzegowy, to każdy ze zbiórów F_n też byłby brzegowy, a jako domknięty – nigdzie gęsty. Wyszłoby, że A jest I kategorii. Dopełnienie zbioru rezydualnego A też jest I kategorii i cała przestrzeń byłaby sumą dwóch zbiorów I kategorii, a więc zbiorem I kategorii, a to, w przypadku przestrzeni zupełnej, przeczy Twierdzeniu Baire'a.

ZADANIE 5. W przestrzeni metrycznej (X, d) dany jest zbiór otwarty U i punkt $x_0 \in U$. Udowodnij (poprzez podanie wzoru), że istnieje funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$ o własnościach:

1. $f(x) \in [0,1]$ dla wszystkich $x \in X$,
2. $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \notin U$,
3. $f(x) = 1 \iff x = x_0$.

UWAGA! Oczywiście chodziło o JEDNĄ funkcję mającą te trzy własności. Gdyby chodziło o trzy funkcje to po pierwsze napisałbym ISTNIEJĄ (a jest ISTNIEJE). Po drugie, co by to było za zadanie na egzamin, skoro za pierwsze dwie funkcje można przyjąć funkcje tożsamościowo równe zeru, a za trzecią $f(x) = 1 + d(x, x_0)$.

ROZWIĄZANIE: Niech r oznacza promień kuli wokół x_0 w całości zawartej w U. Wtedy przykładem funkcji o żądanych własnościach jest

$$f(x) = \max\left\{0, 1 - \tfrac{d(x,x_0)}{r}\right\}.$$

Jest ona ciągła z ciągłości metryki, ciągłości funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem $g(t) = \max\{0, 1 - \frac{t}{r}\}$ i tego, że złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe.
Warunek 1 jest oczywisty ze wzoru, warunek 2 wynika stąd, że $f > 0$ tylko na kuli $K(x_0, r)$, a warunek 3 wynika z aksjomatu tożsamości: tylko dla $x = x_0$ wyjdzie $f(x) = 1$.